

Муниципальное бюджетное общеобразовательное  
учреждение г. Мурманска  
средняя общеобразовательная школа № 31

**Утверждено**

Директор С.А. Багурина  
Приказ № 176/3 от 31 августа 2016г.

Программа факультативного курса  
для учащихся 8-9 классов  
**«Уравнения и неравенства с параметрами»**

утверждена на заседании экспертного совета

ГИМЦРО города Мурманска,

Программа рекомендована учителям математики для проведения элективных курсов

предпрофильной подготовки учащихся общеобразовательных школ

34 часа в год

Программу разработала: Кузьмина Елена Ивановна,

учитель математики МБОУ СОШ № 31

Программа рассмотрена на заседании

МО учителей математики и информатики

МБОУ СОШ № 31

Протокол № 1 от 30 августа 2016 г.

Рук. МО Иванова Т.И.

Программа рассмотрена на методическом совете

МБОУ СОШ № 31

Протокол № 1 от 30 августа 2016

**Мурманск  
2016 г.**

Большинство жизненных задач решается как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду.

Л. Н. Толстой

### **Пояснительная записка**

Общеобразовательная программа школьного курса математики не предусматривает решение задач с параметрами, а на вступительных экзаменах в вузы и на ЕГЭ по математике задачи с параметрами присутствуют, решение которых вызывает большие затруднения учащихся. Задачи с параметрами обладают диагностической и прогностической ценностью, которые позволяют проверить знания основных разделов школьного курса математики, уровень логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности.

Основная задача курса – познакомить учащихся с общими подходами решения заданий с параметрами, подготовить учащихся таким образом, чтобы они смогли в атмосфере конкурсного экзамена успешно справиться с задачами, содержащие параметры.

Решить уравнение, определить количество решений, исследовать уравнение, найти положительные корни, доказать, что неравенство не имеет решений и т.д.- все это варианты параметрических примеров. Поэтому невозможно дать универсальных указаний по решению примеров, в данном курсе рассматриваются различные примеры с решениями. Материал курса представлен по схеме: справочные сведения, примеры с решениями, примеры для самостоятельной работы, примеры для определения успешности усвоения материала.

Решение заданий с параметрами способствуют формированию навыков исследовательской деятельности, интеллектуальному развитию.

Среди задач, содержащих параметр, встречаются задачи, которые условно можно разделить на два класса. В первый класс можно отнести задачи, в которых надо решить уравнение или неравенство при всех возможных значениях параметров. Ко второму классу отнесем задачи, в которых надо найти не все решения, а лишь те из них, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Класс этих задач неисчерпаем.

Наиболее понятный для школьников способ решения таких задач состоит в том, что сначала находятся все решения, а затем отбираются те, которые удовлетворяют дополнительным условиям. Но это удастся не всегда.

Иногда встречаются уравнения или неравенства, где дополнительные условия сформулировано так, что оно, легко переведенное на математический язык, приводит к решению системы уравнений, неравенств или к решению смешанной системы, относящейся уже к первому классу.

Встречается большое количество задач, в которых найти все множество решений невозможно, да нас об этом и не просят. Поэтому приходится искать способ решить поставленную задачу, не имея в распоряжении всего множества решений данного уравнения или неравенства, например, искать специальные свойства входящих в уравнение функций, которые позволяют судить о существовании некоторого специального множества решений.

При решении задач с параметрами иногда удобно, а иногда просто необходимо, строить графики. Иногда рассматриваются графики в обычной плоскости, а иногда их лучше рассмотреть в плоскости  $(x, a)$ , где  $x$  – независимая переменная, а  $a$  – параметр. Бывает, что задача решается без всяких графиков, но более громоздко. Кроме того, эскизы графиков часто помогают наглядно увидеть ход решения задачи. Очевидно, что наглядная интерпретация – одно из самых эффективных средств решения задач с параметрами. Однако наглядность не должна заменять строгие математические выкладки. В некоторых случаях, получив решение задачи с помощью графика, желательно подкрепить результат с помощью аналитических выкладок.

При решении уравнений и неравенств нельзя забывать о том, что для разных степеней многочлена. Входящих в них, методы решений разные. Поэтому в первую очередь рассматривают решения при тех значениях параметра, при которых обращается в ноль коэффициент при старшей степени  $x$  многочлена..

И последнее: учащимися должны быть четко усвоены различные равносильные преобразования уравнений и неравенств, что позволит им при решении задач определять, к каким изменениям уравнения приведет то или иное преобразование формулы функции, а значит, уберезет от ошибок.

**Цели изучения курса:** обобщение и систематизация, расширение и углубление знаний по теме решение уравнений , неравенств и их систем, обретение практических навыков выполнения заданий с параметром, повышение уровня математической подготовки школьников.

**Задачи курса:**

- ✓ - систематизировать знания учащихся, полученные в 7, 8 и 9 классах, при решении линейных и квадратных уравнений и неравенств;

- ✓ - выявить и развить их математические способности;
- ✓ - создать целостное представление о решении линейных уравнений и неравенств, содержащих параметры;
- ✓ - создать целостное представление о решении квадратных уравнений и неравенств, содержащих параметры;
- ✓ - углубить знания по математике, предусматривающие формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету;
- ✓ обеспечить подготовку к профессиональной деятельности, требующей высокой математической культуры.

**В результате изучения курса обучающиеся должны:**

**знать**

- понятие параметра;
- основные методы решения линейных, квадратных уравнений с параметрами;
- зависимости количества корней уравнения от значений параметра;
- зависимости величин при составлении математических моделей реальных ситуаций.

**уметь:**

- решать линейные, квадратные уравнения с параметрами;
- решать текстовые задачи с параметрами алгебраическими методами;
- интерпретировать результат с учетом ограничений условия задачи;
- проводить отбор решений, исходя из формулировки задачи;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности для моделирования практических ситуаций и исследования построенных моделей с использованием решений линейных и квадратных уравнений с параметрами.

**В результате изучения курса школьники должны усвоить различные приемы решения уравнений и неравенств:**

Рассмотрение параметра как независимой переменной и решение уравнения относительно этой переменной;

1. Выражение параметра как функции от  $x$  и использование графической иллюстрации в системе  $хоу$ .
2. Использование свойств функций, входящих в уравнение, неравенство, систему: ограниченность, симметричность алгебраических выражений, входящих в формулу функции, монотонность, четность;
3. Построение диаграммы решений уравнений и неравенств;

4. Учетывание различных возможностей расположения нулей функции, входящей в уравнение, в зависимости от значений параметра при использовании метода интервалов (с помощью разностных функций или кривых знаков).

**Формы работы:** лекционно-семинарская, групповая и индивидуальная.

**Методы работы:** исследовательский и частично-поисковый.

**Виды деятельности на занятиях:** лекция, беседа, практикум, консультация, работа с компьютером.

**При решении задач с параметрами одновременно активно реализуются основные методические принципы:**

- *принцип параллельности* – следует постоянно держать в поле зрения несколько тем, постепенно продвигаясь по ним вперед и вглубь;
- *принцип вариативности* – рассматриваются различные приемы и методы решения с различных точек зрения: стандартность и оригинальность, объем вычислительной и исследовательской работы;
- *принцип самоконтроля* – невозможность подстроиться под ответ вынуждает делать регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач;
- *принцип регулярности* – увлеченные математикой дети с удовольствием дома индивидуально исследуют задачи, т. е. занятия математикой становятся регулярными, а не от случая к случаю на уроках.
- *принцип последовательного нарастания сложности.*

### **Тематическое планирование учебного материала**

#### **8 класс**

1. Линейное уравнение с параметром и уравнения, приводимые к линейным. Диаграмма решений. 4ч
2. Дробно-линейные уравнения с параметром. 5ч
3. Линейные неравенства с параметром и неравенства, приводимые к линейным. 4ч

- |   |    |
|---|----|
| 4. Уравнения и неравенства с параметром и модулем.  | 6ч |
| 5. Уравнения и неравенства на ограниченном множестве.   | 4ч |
| 6. Квадратные уравнения с параметром и уравнения. Приводимые к квадратным.  | 4ч |
| 7. Квадратные уравнения с параметром при особых условиях.   | 2ч |
| 8. Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена, исследованию расположения его корней на координатной оси. | 5ч |

### 9 класс

- |   |    |
|---|----|
| 1. Повторение: виды уравнений, изученных в 8 классе, способы их решения. Уравнения с ограничениями на множество решений и уравнения на ограниченном множестве. Расположение корней квадратного трехчлена. | 6ч |
| 2. Системы линейных уравнений и неравенств с параметрами.   | 4ч |
| 3. Квадратные неравенства с параметрами.  | 4ч |
| 4. Функционально-графические методы решения задач с параметрами.  | 6ч |
| 5. Решение систем уравнений и неравенств второй степени.  | 4ч |
| 6. Решим относительно параметра.  | 2ч |
| 7. Неравенства с параметром, решаемые методом интервалов. Разностные функции.   | 4ч |
| 8. Исследование свойств функций при решении уравнений и неравенств с параметрами.   | 4ч |

### Содержание курса

#### **Тема 1. Линейное уравнение с параметром и уравнения, приводимые к линейным. Диаграмма решений.**

Текстовые задачи, не имеющие решения. Определение параметра.

Решение линейных, квадратных уравнений в общем виде.

Линейное уравнение вида  $ax = b$  ( $x$ - переменная,  $a, b$ - параметры). Алгоритм решения линейного уравнения с параметром. Зависимость количества корней от параметров  $a$  и  $b$ .

Диаграмма решений.

#### **Тема 2. Дробно-линейные уравнения с параметром.**

Дробно – рациональные уравнения с параметром. Решение дробно – рациональных уравнений. Решение задач с параметрами.

**Тема 3. Линейные неравенства с параметром и неравенства, приводимые к линейным.**

Решение линейного уравнения и неравенства с параметром при наличии дополнительных условий к корням уравнения. Уравнение с параметром, сводимое к линейному уравнению.

**Тема 4. Уравнения и неравенства с параметром и модулем.**

Основные методы решения уравнений с модулем. Раскрытие модуля по определению, переход от исходного уравнения к равносильной системе, возведение в квадрат обеих частей уравнения, метод интервалов, графический метод, использование свойств

абсолютной величины. Уравнения вида  $|f(x)| = a, f|x| = a$ ,

где  $a \in R; |f(x)| = g(x), |f(x)| = |g(x)|$ . Метод интервалов при решении уравнений,

содержащих абсолютные величины. Способ последовательного раскрытия модуля при решении уравнений, содержащих «модуль в модуле». Графическое решение уравнений, содержащих абсолютные величины. Использование свойств абсолютной величины при решении уравнений. Уравнения с параметрами, содержащие абсолютные величины.

Неравенства с одним неизвестным. Основные методы решения неравенств с модулем.

Неравенства вида  $|f(x)|_{<, \leq, \geq} > a$ , где  $a \in R$ . Неравенства

вида  $|f(x)|_{<, \leq, \geq} > g(x), |f(x)|_{<, \leq, \geq} > |g(x)|$ . Метод интервалов при решении неравенств, содержащих знак модуля.

**Тема 5. Уравнения и неравенства на ограниченном множестве.**

ОДЗ уравнения, неравенства. Область определения функции, ограниченность функций.

Графическая интерпретация решения уравнения и неравенства.

**Тема 6. Квадратные уравнения с параметром и уравнения. Приводимые к квадратным.**

Понятие квадратного уравнения с параметром. Решение квадратных уравнений с параметром. Решение квадратных уравнений с параметром при наличии дополнительных условий к корням уравнений. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром. Графический метод решения уравнений с параметром.

Основная цель -

выработать умения решать квадратные уравнения с параметром,

исследовать количество корней квадратного уравнения в зависимости от параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  
познакомить с особенностями расположения корней квадратного уравнения через решение задач (при каких значениях параметра корни больше (меньше, не больше, не меньше) заданного числа  $p$ ; корни расположены между числами  $p$  и  $q$ ; корни не принадлежат промежутку с концами в точках  $p$  и  $q$ ).

### **Тема 7. Квадратные уравнения с параметром при особых условиях.**

Решение квадратных уравнений с параметром при наличии дополнительных условий к корням уравнений. Системы уравнений и неравенств; уравнения приводимые к квадратным.

### **Тема 8. Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена, исследованию расположения его корней на координатной оси.**

Актуализация знаний о квадратном трехчлене, квадратном уравнении.  
Исследование количества корней, в зависимости от дискриминанта, знаков корней с помощью теоремы Виета. Исследование расположения корней квадратного трехчлена относительно одной точки, относительно двух и более точек. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена.

## **9 класс**

### **Тема 1. Повторение: виды уравнений, изученных в 8 классе, способы их решения. Уравнения с ограничениями на множество решений и уравнения на ограниченном множестве. Расположение корней квадратного трехчлена.**

Общие подходы к решению линейных и квадратных уравнений. Решение линейных и квадратных уравнений, содержащих параметр. Решение уравнений, приводимых к линейным и квадратным. Решения линейных неравенств. Решение линейных неравенств, содержащих параметр (аналитическим и графическим методом), решение линейных неравенств с дополнительным условием. Решение обратных задач, в которых параметр рассматривается, как отдельная переменная.

### **Тема 2. Системы линейных уравнений и неравенств с параметрами**



Классификация систем линейных уравнений по количеству решений (неопределенные, однозначные, несовместные). Понятие системы с параметрами. Алгоритм решения систем линейных уравнений с параметрами. Параметр и количество решений системы линейных уравнений.

### **Тема 3. Квадратные неравенства с параметрами.**

Квадратные неравенства, задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. Решение квадратных уравнений с параметром первого типа («для каждого значения параметра найти все решения уравнения»). Решение квадратных уравнений второго типа («найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение удовлетворяет заданным условиям»). Решение квадратных неравенств с параметром первого типа. Решение квадратных неравенств с параметром второго типа.

### **Тема 4. Функционально-графические методы решения задач с параметрами.**

Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами. Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств. Использование симметрии аналитических выражений. Метод решения относительно параметра. Применение равносильных переходов при решении уравнений и неравенств с параметром.

### **Тема 5. Решение систем уравнений и неравенств второй степени.**

Методы решения систем уравнений и неравенств второй степени. Решение аналитическим и графическим методами Систем и неравенств второй степени.

### **Тема 6. Решим относительно параметра.**

Метод решения относительно параметра. Применение равносильных переходов при решении уравнений и неравенств с параметром.

### **Тема 7. Неравенства с параметром, решаемые методом интервалов. Разностные функции.**

Неравенства с параметром, решаемые методом интервалов. Аналитическая и графическая суть метода интервалов, его универсальность при решении неравенств.

### **Тема 8. Исследование свойств функций при решении уравнений и неравенств с параметрами.**

Повторение свойств функции. Аналитические и графические способы исследования свойств функции. Применение свойств функции при решении уравнений и неравенств с параметрами.

### Литература:

1. Локоть В.В. Задачи с параметрами в курсе 8-9 классов с углубленным изучением математики.
2. Горнштейн ПИ., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами.
3. Ястребинецкий Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры.
4. «Математика» Е. М. Родионов, учебный центр «Ориентир» при МГТУ им. Н. Э. Баумана, книги 1 и 1, 2004 г.
5. «Математика» А. А. Болотов, издательство «МЭИ», книга 2, 1998 г.
6. «Математика» О. Ю. Черкасов, МГУ, 1984 г.
7. «Задачи с параметрами» П. И. Горнштейн, «Илекса», «Гимназия», Москва – Харьков, 1998 г.
8. Справочник для поступающих в вузы «Решение задач с параметрами» Е. М. Родионов, изд. «Аспект», 1992 г.
9. «Беседы с учителем математики» А. Г. Мордкович, библиотека журнала «Математика в школе», 1995 г.
10. «Уравнения и неравенства с параметром» А. Х. Шахмейстер, Москва, 2004 г.
11. Локоть В. В.: «Задачи с параметрами в курсе 8 – 9 классов с углубленным изучением математики», «Задачи с параметрами» для 10 и 11 классов, «Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы», «Иррациональные уравнения, неравенства, системы, задачи с модулем».
12. «Квант», 4/1997г.
13. Приложение к газете «1 сентября», «Математика» 36/94, 12/94, 21/95, 38/94, 16/95, 34/94, семинар профессора А. Г. Мордковича.
14. «Уравнения и неравенства с параметрами» М. К. Потапов, изд. МГУ. 1992 г.

### Интернет-ресурсы:

1. Цифровые образовательные ресурсы (ЦОР) к учебникам издательства "Мнемозина" представлены на сайте <http://school-collection.edu.ru/>
2. [www.math.ru](http://www.math.ru) Интернет - поддержка учителей математики , материалы для уроков, официальные документы Министерства образования и науки, необходимые в

работе.

3. [www.it-n.ru](http://www.it-n.ru) Сеть творческих учителей.
4. [www.etudes.ru](http://www.etudes.ru) Математические этюды. На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях.
5. [www.problems.ru](http://www.problems.ru) База данных задач по всем темам школьной математики. Задачи разбиты по рубрикам и степени сложности. Ко всем задачам приведены решения.
6. [www.golovolomka.hobby.ru](http://www.golovolomka.hobby.ru) Головоломки для умных людей. На сайте можно найти много задач (логических, на взвешивания и др.), вариации на тему кубика Рубика, электронные версии книг Р. Смаллиана, М. Гарднера, Л. Кэрролла, ведения занятий, приемах работы на уроках.
7. [www.college.ru/mathematics](http://www.college.ru/mathematics) Математика на портале «Открытый колледж ». Можно найти учебный материал по различным разделам математики.
8. [www.int-edu.ru](http://www.int-edu.ru) Институт новых технологий. На сайте можно ознакомиться с продукцией, предлагаемой Институтом, например, программами «Живая статистика», «АвтоГраф», развивающе-обучающей настольной игрой «Доли и дроби» и др.
9. [school-collection.edu](http://school-collection.edu) Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
10. <http://www.prosv.ru> - сайт издательства «Просвещение» (рубрика «Математика»)
11. <http://www.drofa.ru> - сайт издательства Дрофа (рубрика «Математика»)
12. <http://www.center.fio.ru/som> - методические рекомендации учителю-предметнику (представлены все школьные предметы). Материалы для самостоятельной разработки профильных проб и активизации процесса обучения в старшей школе.