

# **Алгебра плюс: элементарная алгебра с точки зрения высшей математики.**

## **1. Пояснительная записка**

Рабочая программа элективного учебного предмета «Алгебра плюс: Элементарная алгебра с точки зрения высшей математики» для учащихся 10 – 11 классов составлена на основе авторской программы А.Н. Землякова. Рабочая программа ориентирована на использование учебника Землякова А.Н. «Алгебра +: рациональные и иррациональные алгебраические задачи» Элективный курс: Учебное пособие./ М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

Данная программа элективного курса по математике даёт широкие возможности повторения и обобщения курса алгебры и основ анализа. В курсе разбирается большое количество сложных задач, которые понадобятся учащимся как при учёбе в высшей школе, так и при подготовке к ЕГЭ.

Данный курс предназначен для учащихся профильных физико-математических 10 - 11 классов. Программа рассчитана на 68 часов на два года обучения ( 1 час в неделю). Темы, предложенные этой программой, значительно расширяют и углубляют общеобразовательную программу по алгебре и началам анализа (профильный уровень)

Программа курса состоит из 6 тем:

Тема 1. Логика алгебраических задач

Тема 2. Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения

Тема 3, Рациональные алгебраические уравнения и неравенства

Тема 4. Рациональные алгебраические системы

Тема 5. Иррациональные алгебраические задачи

Тема 6. Алгебраические задачи с параметрами.

Поскольку изучение данного элективного курса должно быть тесно связано с основной программой, курс спланирован на два года обучения в 10 классе (темы 1 – 3, 6) и в 11 классе (темы 4, 5, 6).

Учитывая специфику линейного построения курса, с тем чтобы не было значительного временного отрыва от изученного материала, тема 6 «Алгебраические задачи с параметрами» изучается и в 10, и в 11 классах. При этом задачи подбираются согласно изучаемому материалу.

Данная тема вызывает наибольшие затруднения школьников. Задачи с параметрами включены в часть С заданий ЕГЭ по математике.

### **Цели данного курса:**

Курс «Алгебра плюс: элементарная алгебра с точки зрения высшей математики» направлен на достижение следующих целей:

- получение общего представления об элементарной алгебре, применяемых в ней методах, -как о составляющей всей математики как науки.
- развитие логической и методологической (в узком смысле) культуры, составляющей существенный компонент мышления, рассматриваемый в рамках общей культуры.
- овладение общими приемами организации действий: составлением плана, осуществлением плана, анализом и выражением результатов действий.
- получение представления об универсальном характере математических методов, о тесной взаимосвязи элементарной алгебры с высшей математикой: арифметикой, алгеброй, математическим анализом; о единстве математики в целом.
- развитие внутренней мотивации и поисковой активности в предметной деятельности, формирование устойчивого и осознанного интереса к ней.

### **Задачи курса**

При изучении курса «Алгебра плюс: элементарная алгебра с точки зрения высшей математики» перед учащимися ставятся следующие конкретные задачи:

- получение знаний об основных логических и содержательных типах алгебраических задач: уравнений, неравенств, систем, совокупностей с рациональными, иррациональными функциями/выражениями;
- овладение навыками соответствующих алгебраических преобразований выражений и логических преобразований алгебраических задач;
- овладение логическими, аналитическими, графическими методами решения алгебраических задач с изучаемыми классами выражений и функций;
- освоение методов решения и исследования вычислительных и логических задач с параметрами;
- получение конкретного представления о взаимосвязях высшей математики (арифметики, алгебры, математического анализа) с элементарной алгеброй на основе использования методов высшей математики при исследовании и решении алгебраических задач.

**Образовательные результаты**  
**(планируемые результаты обучения)**

**Общеинтеллектуальные умения:**

- умение анализировать различные задачи и ситуации, выделять главное, достоверное в той или иной информации;
- владение логическим, доказательным стилем мышления,
- умение логически обосновывать свои суждения;
- умение конструктивно подходить к предлагаемым задачам;
- умение планировать и проектировать свою деятельность,
- проверять и оценивать ее результаты.

**Общекультурные компетенции:**

- понимание элементарной математики как неотъемлемой части математики, методы которой базируются на многих разделах математики высшей;
- понимание роли элементарной математики в развитии математики, роли математиков в развитии современной элементарной математики; восприятие математики как развивающейся фундаментальной науки, являющейся неотъемлемой составляющей науки, цивилизации, общечеловеческой культуры во взаимосвязи и взаимодействии с другими областями мировой культуры.

### **Предметные умения:**

- умение проводить логически грамотные преобразования выражений и эквивалентные преобразования алгебраических задач (уравнений, неравенств, систем, совокупностей);
- умение использовать основные методы при решении алгебраических задач с различными классами функций (рациональными и иррациональными алгебраическими), в том числе: методы замены, разложения, подстановки.

## **Содержание курса**

### **10 класс (34 часа)**

#### ***Тема 1. Логика алгебраических задач ( 6 часов )***

Элементарные алгебраические задачи как предложения с переменными.

Множество решений задачи. Следование и равносильность (эквивалентность) задач.

Уравнения с переменными. Числовые неравенства и неравенства с переменной. Свойства числовых неравенств.

Сложные (составные) алгебраические задачи. Конъюнкция и дизъюнкция предложений. Системы и совокупности задач.

Алгебраические задачи с параметрами.

Логические задачи с параметрами. Задачи на следование и равносильность.

Интерпретация задач с параметрами на координатной плоскости

## ***Тема 2. Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения***

***(12 часов)***

Представление о целых рациональных алгебраических выражениях. Многочлены над полями  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  и над кольцом  $\mathbb{Z}$ . Степень многочлена. Кольца многочленов.

Делимость и деление многочленов с остатком. Алгоритмы деления с остатком.

Теорема Безу. Корни многочленов. Следствия из теоремы Безу: теоремы о делимости на двучлен и о числе корней многочленов. Кратные корни.

Полностью разложимые многочлены и система Виета. Общая теорема Виета.

Элементы перечислительной комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения, перестановки с повторениями. Формула Ньютона для степени бинома. Треугольник Паскаля.

Квадратный трехчлен: линейная замена, график, корни, разложение, теорема Виета.

Квадратичные неравенства: метод интервалов и схема знаков квадратного трехчлена.

Кубические многочлены. Теорема о существовании корня у полинома нечетной степени. Угадывание корней и разложение.

Куб суммы/разности. Линейная замена и укороченное кубическое уравнение. Формула Кардано.

Графический анализ кубического уравнения  $x^3 + Ax = B$ . Неприводимый случай (три корня) и необходимость комплексных чисел.

Уравнения степени 4. Биквадратные уравнения. Представление о методе замены.

Линейная замена, основанная на симметрии.

Угадывание корней. Разложение. Метод неопределенных коэффициентов. Схема разложения Феррари.

Полиномиальные уравнения высших степеней. Понижение степени заменой и разложением. Теоремы о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами.

Приемы установления иррациональности и рациональности чисел.

### ***Тема 3. Рациональные алгебраические уравнения и неравенства***

***(6 часов)***

Представление о рациональных алгебраических выражениях.

Симметрические, кососимметрические и возвратные многочлены и уравнения.

Дробно-рациональные алгебраические уравнения. Общая схема решения.

Метод замены при решении дробно-рациональных уравнений.

Дробно-рациональные алгебраические неравенства. Общая схема решения методом сведения к совокупностям систем.

Метод интервалов решения дробно-рациональных алгебраических неравенств.

Метод оценки. Использование монотонности. Метод замены при решении неравенств.

Неравенства с двумя переменными. Множества решений на координатной плоскости. Стандартные неравенства. Метод областей.

### ***Тема 6 Алгебраические задачи с параметрами (часть I -10 часов)***

Что такое задача с параметрами. Аналитический подход. Выписывание ответа (описывание множеств решений) в задачах с параметрами.

Рациональные задачи с параметрами. Запись ответов.  
Иррациональные задачи с параметрами. «Собирание» ответов.  
Задачи с модулями и параметрами. Критические значения параметра.  
Замена в задачах с параметрами.  
Метод разложения в задачах с параметрами. Разложение с помощью разрешения относительно параметра.  
Метод координат «Оха» в задачах с параметрами. Идея метода.  
Метод координат «Оха» при решении рациональных и иррациональных алгебраических уравнений с параметрами.  
Уединение параметра и метод «Оха».

## **11 класс(34 часа)**

### ***Тема 4. Рациональные алгебраические системы***

***(15 часов)***

Уравнения с несколькими переменными. Рациональные уравнения с двумя переменными. Однородные уравнения с двумя переменными.

Рациональные алгебраические системы. Метод подстановки. Метод исключения переменной. Равносильные линейные преобразования систем.

Однородные системы уравнений с двумя переменными.

Замена переменных в системах уравнений.

Симметрические выражения от двух переменных.

Теорема Варинга — Гаусса о представлении симметрических многочленов через элементарные.

Рекуррентное представление сумм степеней через элементарные симметрические многочлены (от двух переменных).

Системы Виета и симметрические системы с двумя переменными.

Метод разложения при решении систем уравнений.

Методы оценок и итераций при решении систем уравнений.

Оценка значений переменных.

Сведение уравнений к системам.

Системы с тремя переменными. Основные методы.

Системы Виета с тремя переменными.

### ***Тема 5. Иррациональные алгебраические задачи (12 часов)***

Представление об иррациональных алгебраических функциях. Понятия арифметических и алгебраических корней. Иррациональные алгебраические выражения и уравнения.

Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной. Замена с ограничениями.

Неэквивалентные преобразования. Сущность проверки.

Метод эквивалентных преобразований уравнений с квадратными радикалами.

Сведение иррациональных и рациональных уравнений к системам.

Освобождение от кубических радикалов.

Метод оценки. Использование монотонности. Использование однородности.

Иррациональные алгебраические неравенства. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений.

Эквивалентные преобразования неравенств. Стандартные схемы освобождения от радикалов в неравенствах (сведение к системам и совокупностям систем).

«Дробно-иррациональные» неравенства. Сведение к совокупностям систем.

Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Определение промежутков знакопостоянства непрерывных функций. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств.

Замена при решении иррациональных неравенств.

Использование монотонности и оценок при решении неравенств.

Уравнения с модулями. Раскрытие модулей — стандартные схемы. Метод интервалов при раскрытии модулей.

Неравенства с модулями. Простейшие неравенства. Схемы освобождения от модулей в неравенствах.

Эквивалентные замены разностей модулей в разложенных и дробных неравенствах («правило знаков»).

Иррациональные алгебраические системы. Основные приемы.

Смешанные системы с двумя переменными.

### ***Тема 6 Алгебраические задачи с параметрами (часть I I -7 часов)***

Системы с параметрами.

Метод координат «Оха» при решении рациональных и иррациональных алгебраических неравенств с параметрами.

Метод областей при решении рациональных и иррациональных алгебраических неравенств с параметрами.

Замена при использовании метода «Оха».

Задачи с модулями и параметрами.

Задачи на исследование и равносильность задач с параметрами.

Применение производной при анализе и решении задач с параметрами.

### **Оценка уровня достижений учащихся**

Исходя из того, что данный элективный курс в практическом отношении направлен на подготовку к письменному экзамену, форму оценки уровня достижений учащихся целесообразно приблизить к практике экзаменов, использовать критерии оценивания заданий типа C1-C5 экзамена ЕГЭ по математике.

Существенная особенность подготовки к конкурсным экзаменам — выработка готовности к неожиданным по формулировке или по содержанию заданиям. Так же составлены и самостоятельные и контрольные работы. Важно, что проведение таких работ служит не только проверке уровня достижений: предлагаемые работы являются неотъемлемой частью процесса обучения, поэтому большое значение имеет разбор и комментирование

решений проводимых контрольных (с анализом ошибок, оригинальных идей и т. п.).

Полезно проводить и достаточно простые самостоятельные проверочные работы на знание методов, но и здесь важно, что они не оценивающие, а обучающие. Оценки за них - условные. Например, просто по числу верно решенных задач.

**Тематическое планирование элективного курса  
«Алгебра плюс: элементарная алгебра с точки зрения высшей  
математики»  
10- 11 классы, ( 34ч и 34ч)**

№	Изучаемый материал	часы	месяц
<b>10 класс      <i>Тема 1. Логика алгебраических задач ( 6 часов )</i></b>			
1	Элементарные алгебраические задачи как предложения с переменными.	1	С Е Н Т Я Б Р  О К
2	Множество решений задачи. Следование и равносильность (эквивалентность) задач.	1	
3	Уравнения с переменными. Числовые неравенства и неравенства с переменной. Свойства числовых неравенств.	1	
4	Сложные (составные) алгебраические задачи. Конъюнкция и дизъюнкция предложений. Системы и совокупности задач. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	
5	Алгебраические задачи с параметрами. Логические задачи с параметрами. Задачи на следование и равносильность.	1	
6	Интерпретация задач с параметрами на координатной плоскости	1	

**Тема 2. Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения  
(12 часов)**

7	Представление о целых рациональных алгебраических выражениях. Степень многочлена. Кольца многочленов. Делимость и деление многочленов с остатком. Алгоритмы деления с остатком.	1	Т Я Б Р Ь
8	Теорема Безу. Корни многочленов. Следствия из теоремы Безу: теоремы о делимости на двучлен и о числе корней многочленов. Кратные корни. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	
9	Полностью разложимые многочлены и система Виета. Общая Теорема Виета.	1	
10	Квадратичные неравенства: метод интервалов и схема знаков квадратного трехчлена.	1	Н О Я Б Р Ь
11	Кубические многочлены. Теорема о существовании корня у полинома нечетной степени. Угадывание корней и разложение на множители. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	
12	Куб суммы/разности. Линейная замена и укороченное кубическое уравнение. Формула Кардано.	1	
13	Графический анализ кубического уравнения $x^3 + Ax = B$ .	1	Д Е К А Б Р Ь
14	Неприводимый случай (три корня) и необходимость комплексных чисел.	1	
15	Уравнения степени 4. Биквадратные уравнения. Представление о методе замены. Линейная замена, основанная на симметрии. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	
16	Угадывание корней. Разложение. Метод неопределенных коэффициентов. Схема разложения Феррари.	1	Я Н В
17	Полиномиальные уравнения высших степеней. Понижение степени заменой и разложением. Теоремы о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами.	1	

18	Приемы установления иррациональности и рациональности чисел.	1	А
<b>Тема 3. Рациональные алгебраические уравнения и неравенства (6 часов)</b>			
19	Представление о рациональных алгебраических выражениях. Симметрические, кососимметрические и возвратные многочлены и уравнения. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	Р Б
20	Дробно-рациональные алгебраические уравнения. Общая схема решения. Метод замены при решении дробно-рациональных уравнений.	1	Ф Е В Р А Л Б
21	Дробно-рациональные алгебраические неравенства. Общая схема решения методом сведения к совокупностям систем.	1	
22	Метод интервалов решения дробно-рациональных алгебраических неравенств. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	
23	Метод оценки. Использование монотонности. Метод замены при решении неравенств.	1	
24	Неравенства с двумя переменными. Множества решений на координатной плоскости. Стандартные неравенства. Метод областей.	1	
<b>Тема 6 Алгебраические задачи с параметрами (часть I -10 часов)</b>			
25	Что такое задача с параметрами. Аналитический подход. Выписывание ответа (описывание множеств решений) в задачах с параметрами.	1	М А Р Т
26	Рациональные задачи с параметрами. Запись ответов	1	
27	Иррациональные задачи с параметрами. «Собирание»	1	А

	ответов.		П
28	Задачи с модулями и параметрами. Критические значения параметра	1	Р
29	Замена в задачах с параметрами.	1	Е
30	Метод разложения в задачах с параметрами. Разложение с помощью разрешения относительно параметра.	1	Л
31	Метод координат «Оха» в задачах с параметрами. Идея метода. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	Б
32	Метод координат «Оха» при решении рациональных и иррациональных уравнений и неравенств.	1	М А Й
33	Уединение параметра и метод «Оха».	1	
34	Контрольная работа	1	
<b>11 класс Тема 4. Рациональные алгебраические системы (15 часов)</b>			
1	Уравнения с несколькими переменными. Рациональные уравнения с двумя переменными. Однородные уравнения с двумя переменными.	1	С
2	Рациональные алгебраические системы. Метод подстановки. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	Е
3	Метод исключения переменной. Равносильные линейные преобразования систем.	1	Н
4	Однородные системы уравнений с двумя переменными	1	Т
5	Замена переменных в системах уравнений. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	Я
6	Симметрические выражения от двух переменных.	1	Б
7	Теорема Варинга — Гаусса о представлении симметрических многочленов через элементарные.	1	Р
8	Рекуррентное представление сумм степеней через элементарные симметрические многочлены (от двух	1	Б

	переменных).		
9	Системы Виета и симметрические системы с двумя переменными. <i>Самостоятельная работа.</i>	1	Н О Я Б Р Ь
10	Метод разложения при решении систем уравнений.	1	
11	Методы оценок и итераций при решении систем уравнений	1	
12	Оценка значений переменных.	1	
13	Сведение уравнений к системам.	1	Д Е К А Б Р Ь
14	Системы с тремя переменными. Основные методы.	1	
15	Системы Виета с тремя переменными.	1	
<b>Тема 5. Иррациональные алгебраические задачи (12 часов)</b>			
16	Представление об иррациональных алгебраических функциях. Понятия арифметических и алгебраических корней. Иррациональные алгебраические выражения и уравнения.	1	Я Н В А Р Ь
17	Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной. Замена с ограничениями. Неэквивалентные преобразования. Сущность проверки. Метод эквивалентных преобразований уравнений с квадратными радикалами.	1	
18	Сведение иррациональных и рациональных уравнений к системам. Освобождение от кубических радикалов . Метод	1	

	оценки. Использование монотонности. Использование однородности.		
19	Иррациональные алгебраические неравенства. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений.	1	Ф Е В Р А Л Ь
20	Эквивалентные преобразования неравенств. Стандартные схемы освобождения от радикалов в неравенствах (сведение к системам и совокупностям систем).	1	
21	«Дробно-иррациональные» неравенства. Сведение к совокупностям систем.	1	
22	Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств	1	
23	Замена при решении иррациональных неравенств. Использование монотонности и оценок при решении неравенств.	1	
24	Уравнения с модулями. Раскрытие модулей — стандартные схемы	1	М А Р Т
25	Метод интервалов при раскрытии модулей.	1	
26	Эквивалентные замены разностей модулей в разложенных и дробных неравенствах («правило знаков»).	1	
27	Иррациональные алгебраические системы. Основные приемы. Смешанные системы с двумя переменными.	1	
<b>Тема 6 Алгебраические задачи с параметрами (часть I I -7 часов)</b>			
28	Системы с параметрами.	1	А
29	Метод координат «Оха» при решении рациональных и иррациональных алгебраических неравенств с параметрами.	1	П Р Е

30	Метод областей при решении рациональных и иррациональных алгебраических неравенств с параметрами.	1	Л Б
31	Замена при использовании метода «Оха».	1	М А Й
32	Задачи с модулями и параметрами .Задачи на исследование и равносильность задач с параметрами.	1	
33	Контрольная работа	1	
34	Применение производной при анализе и решении задач параметрами.	1	

#### **4. Требования к уровню подготовки выпускников**

В результате изучения курса «Алгебра плюс: элементарная алгебра с точки зрения высшей математики» учащиеся должны:

- знать основные принципы и методы решения алгебраических уравнений.
- знать общую схему решения дробно-рациональных уравнений.
- знать метод интервалов и метод оценки.
- понимать нестандартные формулировки задачи. Уметь применять различные методы для решения алгебраических уравнений.
- уметь решать дробно-рациональные уравнения.
- уметь применять эти методы для решения дробно-рациональных неравенств.
- уметь решать нестандартные по формулировке задачи
- знать различные методы решения систем уравнений
- знать методы решения иррациональных уравнений и неравенств.
- уметь решать системы уравнений различной сложности
- уметь решать иррациональные уравнения и неравенства различной степени сложности

- уметь решать задания с параметрами различными способами

### **Список литературы для учащихся и учителей:**

1. Рациональные уравнения и неравенства. ЕГЭ. Математика./Колесникова С.И.-Азбука-2000, 2011г.
2. Практикум по решению задач: Рациональные уравнения неравенства и системы./ Балаян Э.Н.-ФЕНИКС, 2006
- 3.Математика для поступающих в вузы. /Шарыгин И. Ф. -Дрофа 2006
4. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства./Сергеев И.Н., Панферов В.С. -МЦНМО ,2011
- 5.Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2011 (С1, С3). 10-11 классы. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы./ Лысенко Ф. Ф, Кулабухов С. Ю., -Легион-М, 2011
- 6.Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область “Математика” (Министерство образования РФ) – Национальный фонд подготовки кадров. – М.: Вита-Пресс. 2004.
- 7.Задачи с параметрами на экзаменах / А.Х.Шахмейстер - М.: МЦНМО: , 2009.
8. Математика. Решение задач повышенной сложности / А.Р.Рязановский, В.В.Мирошин - М.: Интеллект-Центр, 2007.
- 9.Математика. Задачи с ответами и решениями / И.Н.Сергеев - М.: КДУ, 2005
- 10.Математика - абитуриенту / В.В.Ткачук - М.: МЦНМО, 2005.
11. Готовимся к экзамену по математике: Учебное пособие./ Крамор В.С.- М.: Оникс, 2006.
- 12.ЕГЭ. Математика. Задания типа С / И.Н.Сергеев - М.: "Экзамен", 2009.
13. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В.В.Мирошин - М.: "Экзамен", 2009.
- 14.Математика - абитуриенту / В.В.Ткачук - М.: МЦНМО, 2005.

15. Математика. Задачи с ответами и решениями / И.Н.Сергеев - М.: КДУ, 2005.
16. Математика. Решение задач с параметрами./Родионов Е.М.,-М.,НЦ ЭНАС,2006
17. Методы решения задач с параметрами./ Натягов В.Л., Лужина Л.М.- МГУ,2003
18. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод ./ Моденов В.П.,-М., Экзамен,2006
19. Иррациональные уравнения и неравенства./ А.Х.Шахмейстер., М.: МЦНМО: , 2008.
20. Корни. /А.Х.Шахмейстер. - М.: Издательство МЦНМО, 2008
21. Задачи с параметрами. Иррациональные уравнения, неравенства, системы, задачи с модулем /Локоть В.В.-М.: АРКТИ, 2010